$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

EXO Soit $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application donnée par

$$T(A) = A + 2A^T$$

1) Montrer que T est linéaire et calculer $\mathrm{Ker}(T)$.

2) Pour $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

calculer $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$

1 Il faut montrer que $T(A + \lambda B) = T(A) + \lambda T(B)$

$\forall A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{T(A+\lambda B) =}_{\text{def}} (A+\lambda B) + 2(A+\lambda B)^T \overset{\text{prop. de } T}{=} A + \lambda B + 2(A^T + \lambda B^T)$$

$$= (A + 2A^T) + \lambda(B + 2B^T)$$

$$= T(A) + \lambda\, T(B).$$

$$\mathrm{Ker}(T) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; : \; T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; : \; \begin{pmatrix} a+2a & b+2c \\ c+2b & d+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \; : \; \begin{cases} 3a = 0 \\ b+2c = 0 \\ c+2b = 0 \\ 3d = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$$

(2) $[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}_{can}} \, [T]_{\mathcal{B}_{can}\leftarrow\mathcal{B}_{can}} \, P_{\mathcal{B}_{can}\leftarrow\mathcal{B}}$

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = C$$

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$+\,0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$P = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3ème matrice de $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On doit calculer

$$[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = P^{-1} \cdot C \cdot P$$

Au lieu de

$$\boxed{(P \,\vdots\, I_4) \xrightarrow{OEL} (I_4 \,\vdots\, P^{-1})}$$

et multiplier par $C \cdot P$

on peut faire

$$\left(P \;\vdots\; C.P\right) \xrightarrow{\text{GEL}} \left(I_4 \;\vdots\; P^{-1}.C.P\right)$$

$$\Longrightarrow [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

EXO Soit $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ avec

$$A^3 = P.B.Q \;, \text{ où }$$

$$Q.P = B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(A^2)$.

$$\det(P.B.Q) = \det(Q.P).\det(B)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3^6 = \det(A^3) = \det(A)^3$$

$$\Longrightarrow \det(A) = 3^2 = \sqrt[3]{3^6}$$

$$\Longrightarrow \det(A^2) = \det(A)^2 = (3^2)^2 = 3^4 = 81 \quad \square$$

Exo Soit $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overline{w_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overline{w_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overline{w_3}} \right\}$

Calculer la b.o.n. par GS
(associée à $\mathcal{B}$)

(On admet que $\mathcal{B}$ est base ?!)

$$\bar{v}_1 = \bar{w}_1 \longrightarrow \bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

et $\underset{\text{calculs}}{(\dots)}$ $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Exo}}$ Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Quelle affirmation n'est pas vraie :

1) Si A inversible et A^{-1} diagonalisable au moyen

d'une matrice orthogonale, alors A est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

Faux

2) A est orthogonale ssi A^{-1} existe et A^{-1} est orthogonale

3) $A^T A \bar{x} = A^T b$ peut être incompatible

4) Si A est diagonalisable, et 0 n'est pas une valeur propre, alors A est inversible

et A^{-1} est diagonalisable.

5) Soit $W = \mathrm{Col}(A)$. Si $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{w} = \mathrm{proj}_W(\bar{b})$, alors $\|\bar{b} - \bar{w}\| \leq \|\bar{b} - A\bar{x}\|$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

si $A = P \underbrace{D}_{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}} P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P \underbrace{D^{-1}}_{= \begin{pmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{pmatrix}} P^{-1}$

$\neq 0$